TEMA 6.

1. Calcula la posición relativa de la circunferencia$x^2+y^2-2x+4y-24=0$ y la recta 5x+2y-30=0.
2. ¿Cuál debe ser el radio de la circunferencia de centro (7,-3) para que sea tangente a la recta 2x-3y+5=0. Halla la ecuación de la circunferencia.
3. Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A(-1,-3) y B(-2,1).
4. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancia a los puntos A(-8,0) y B(6,0) es igual a 4. Identifica el tipo de cónica. Escribe los focos, los vértices y la excentricidad.
5. Clasifica las siguientes cónicas determina sus elementos.
    a. $3x^2+8y^2-6x-21=0$
    b. $x^2-6y-4x+13=0$
    c. $4x^2+4y^2-8x+4y-14=0$
    d. $7x^2-5y^2+42x+50y-97=0$
6. Calcula la posición relativa de las circunferencias:

$$x^2+y^2-18x-9=0$$
$$x^2+y^2+6x+4y+10=0$$

7. Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r: x+y-2=0 , s:x-y+4=0

TEMA 6

① $x^2+y^2-2x+4y-24=0$; $s: 5x+2y-30=0$

$A=-2a \rightarrow -2=-2a \rightarrow a=1$

$B=-2b \rightarrow 4=-2b \rightarrow b=-2$ $\quad C_0(1,-2)$

$C=a^2+b^2-r^2 \Rightarrow -24=1+4-r^2 \rightarrow r=\sqrt{29}$

$$d(C_0,s)=\frac{|5\cdot 1+2\cdot(-2)-30|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$$

$d(C_0,s)=\sqrt{29}=r \Rightarrow$ Tangente

② $C_0(7,-3)$ $\quad s: 2x-3y+5=0$

$d(C_0,s)=$ radio

$$d(C_0,s)=\frac{|2\cdot 7-3\cdot(-3)+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{28}{\sqrt{13}}$$

Circunferencia $C_0(7,-3)$, $r=\dfrac{28}{\sqrt{13}}$

$$C=7^2+(-3)^2-\left(\frac{28}{\sqrt{13}}\right)^2=-\frac{30}{13}$$

$$x^2+y^2-14x+6y-\frac{30}{13}=0$$

③ $d(P,A)=d(P,B)$ $\qquad P(x,y)$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}$$

$x^2+2x+1+y^2+6y+9=x^2+4x+4+y^2+2y+1$

$-2x+8y+5=0 \Rightarrow$ Mediatriz $= 2x-8y-5=0$

④ Es la definición de hipérbola

$d(P,A)-d(P,B)=2a=4 \Rightarrow a=2$

$A(-8,0)$, $B(6,0) \Rightarrow$ Son los focos por la definición.

$A=F'=(-8,0)$ y $B=F=(6,0)$

El Centro está en el punto medio de los focos $\Rightarrow C(-1,0)$

$d(F,F')=2c \Rightarrow c=7$ $\qquad \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{y^2}{45}=1$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 49=4+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{45}$

Vértices $A\ (2,0)+(-1,0)=(1,0)$

$A'\ (-2,0)+(-1,0)=(-3,0)$

$F'(-8,0)$, $F(6,0)$

Excentricidad $e=\dfrac{7}{2}$

⑤ a) $3x^2+8y^2-6x-21=0$ ELIPSE

$3(x^2-2x)+8y^2-21=0$

$3[(x-1)^2-1]+8y^2-21=0$

$3(x-1)^2+8y^2=24$

$\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$

$a=\sqrt{8}$
$b=\sqrt{3}$ $\Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

$C_0(1,0)$

Vértices $A(1+\sqrt{8},0)$ $A'(1-\sqrt{8},0)$
$B(1,\sqrt{3})$ $B'(1,-\sqrt{3})$
$F(1+\sqrt{5},0)$ $F'(1-\sqrt{5},0)$

$e=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$

b) $x^2-6y-4x+13=0$ PARÁBOLA

$(x-2)^2-4-6y+13=0$

$(x-2)^2=6y-9$

$(x-2)^2=6(y-\frac{9}{6})$ $2p=6 \rightarrow p=3 \Rightarrow \frac{p}{2}=\frac{3}{2}$ $C(2,3/2)$

$F\ (0,\frac{3}{2})+(2,\frac{3}{2})=(2,3)$

Directriz $y=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$ $y=0$

c) $4x^2+4y^2-8x+4y-14=0$ CIRCUNFERENCIA

$x^2+y^2-2x+y-\frac{14}{4}=0$

$A=-2a=-2 \Rightarrow a=1$ $C_0(1,-1/2)$ $\Rightarrow (x-1)^2+(y+1/2)^2=\frac{19}{4}$

$B=-2b=1 \Rightarrow b=-1/2$

$C=a^2+b^2-r^2 \Rightarrow -14=1+\frac{1}{4}-r^2 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{19}{4}}$

d) $7x^2-5y^2+42x+50y-97=0$ HIPÉRBOLA

$7(x^2+6x)-5(y^2-10y)-97=0$

$7[(x+3)^2-9]-5[(y-5)^2-25]-97=0$

$7(x+3)^2-5(y-5)^2=35$

$\frac{(x+3)^2}{5}-\frac{(y-5)^2}{7}=1$

$a=\sqrt{5}$
$b=\sqrt{7}$
$c=\sqrt{12}$
$C_0=(-3,5)$

$e=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}}$

Vértices $A(-3,5+\sqrt{7})$ $A'(-3,5-\sqrt{7})$
Focos $F(-3,5+\sqrt{12})$ $F'(-3,5-\sqrt{12})$

⑥ $x^2+y^2-18x-9=0 \rightarrow C(9,0) \rightarrow r_1=\sqrt{90}$

$x^2+y^2+6x+4y+10=0 \rightarrow C'(-3,-2) \rightarrow r_2=\sqrt{3}$

$d(C,C')=|\overline{CC'}|=|(12,2)|=\sqrt{144+4}=\sqrt{148}=12{,}16$ $d(C,C')>r_1+r_2$

Exteriores

$r_1+r_2=11{,}2$

$\cancel{r_1-r_2=7{,}75}$

⑦ $d(P,r)=d(P,s)$

$\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |x+y-2|=|x-y+4|$

$x+y-2=x-y+4 \Longrightarrow 2y=6 \Rightarrow \boxed{y=3}$

$x+y-2=-x+y-4 \Longrightarrow 2x=-2 \Rightarrow \boxed{x=-1}$