TEMA 1. 2º BACHILLERATO A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   a. Indica para qué valores de m la matriz B tiene inversa.
   b. Para m=1 resuelve la siguiente ecuación matricial
   $$XA - B^t = C$$
2. Determina, según los valores de m, el rango de la siguiente matriz. Indica cuando la matriz sería regular.
$$\begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
3. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcula A^3, A^{19} y A^n
4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $y\, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X - 5Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases}$

5. Calcula las matrices B que conmutan con la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

TEMA 1. 2º BACHILLERATO A 2019

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&4\\1&m&2\\m&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix}0&0&4\\1&m&2\\m&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\begin{pmatrix}1&m&2\\0&0&4\\m&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[mF_1-F_3]{}\begin{pmatrix}1&m&2\\0&0&4\\0&m^2-2&2m-1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_3]{}$

$\begin{pmatrix}1&m&2\\0&m^2-2&2m-1\\0&0&4\end{pmatrix}$

$m^2-2=0 \rightarrow m=\pm\sqrt{2}$

$2m-1=0 \rightarrow m=1/2$

Para que fuera de rango 2 se tenían que hacer 0 los términos de la 2ª fila para el mismo valor de m, y eso no es posible. Por lo tanto, $rg\,B=3 \quad \forall m\in\mathbb{R}$, y como $rg\,B=3=$ orden tiene siempre inversa.

b) $m=1 \quad XA-B^t=C \longrightarrow X=(C+B^t)A^{-1}$

$C+B^t=\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\\4&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&4\\4&1&3\\5&3&2\end{pmatrix}$

$A^{-1}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1-F_2,\ F_1-F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&3&1&-1&0\\0&0&2&1&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1-F_2]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&3&1&-1&0\\0&0&2&1&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1+F_3,\ 2F_2-3F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&2&0&-1&-2&3\\0&0&2&1&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2/2,\ F_3/2]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&1&0&-1/2&-1&3/2\\0&0&1&1/2&0&-1/2\end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1/2&-1&3/2\\1/2&0&-1/2\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}2&0&4\\4&1&3\\5&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1/2&-1&3/2\\1/2&0&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&-4\\5&3&-4\\9/2&2&-3/2\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}m-1&1&-1\\0&m-2&1\\m&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[mF_1-(m-1)F_3]{}\begin{pmatrix}m-1&1&-1\\0&m-2&1\\0&m&-3m+2\end{pmatrix}\xrightarrow[mF_2-(m-2)F_3]{}$

$\begin{pmatrix}m-1&1&-1\\0&m-2&1\\0&0&3m^2-7m+4\end{pmatrix}$ $\quad 3m^2-7m+4=0 \begin{cases} m_1=\frac{4}{3}\\ m_2=1\end{cases}$

Si $m\neq 1,\frac{4}{3}$ $\quad rg\,A=3=$ orden $\Longrightarrow$ A es regular

Si $m=1,\frac{4}{3}$ $\quad rg\,A=2 \Longrightarrow$ A no es regular

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$A^5 = A^4 \cdot A = -A \cdot A = -A^2$

$A^6 = A^3 \cdot A^3 = I$

$$A^n = \begin{cases} n = 6k \rightarrow I \\ n = 6k+1 \rightarrow A \\ n = 6k+2 \rightarrow A^2 \\ n = 6k+3 \rightarrow A^3 = -I \\ n = 6k+4 \rightarrow A^4 = -A \\ n = 6k+5 \rightarrow A^5 = -A^2 \end{cases}$$

$A^3 = -I \quad , \quad A^{19} = A$

(4)

$$\left.\begin{array}{l} 2X - 5Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rl} \cdot(3) & \cancel{6X} - 15Y = 3A \\ \cdot(-2) & \underline{\cancel{-6X} - 8Y = -2B} \\ & -23Y = 3A - 2B \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \cdot(4) & 8X - \cancel{20Y} = 4A \\ \cdot(5) & \underline{15X + \cancel{20Y} = 5B} \\ & 23X = 4A + 5B \end{array}$$

$$Y = \frac{3A - 2B}{-23} \qquad X = \frac{4A + 5B}{23}$$

$$X = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 8 & -4 \\ 16 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -15 \\ 10 & 25 & 5 \end{pmatrix}}{23} = \begin{pmatrix} 6/23 & -5/23 & 9/23 \\ 12/23 & 13/23 & -19/23 \\ 26/23 & 29/23 & 5/23 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & -3 \\ 12 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix}}{-23} = \begin{pmatrix} 7/23 & -2/23 & -1/23 \\ -9/23 & -4/23 & -3/23 \\ -8/23 & 7/23 & 2/23 \end{pmatrix}$$

(5)

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad AB = B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & -a+3b \\ c+2d & -c+3d \end{pmatrix}$$

$a - c = a + 2b \longrightarrow 2b = -c$

$b - d = -a + 3b \longrightarrow a = 2b + d$

$2a + 3c = c + 2d \longrightarrow a = d - c \rightarrow d = a + c$

$2b + 3d = -c + 3d \longrightarrow 2b - c$

Se puede poner de varias formas

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-2b \end{pmatrix} \ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2b+d & b \\ -2b & d \end{pmatrix} \ \forall b, d \in \mathbb{R}.$$