TEMA 7. 2º BACH A

1. La función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alcanza máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-1,1]$ (1,5 puntos)

2. Calcula las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{|x+2|} & si\ x \leq 1 \\ \frac{x^2-3}{x+1} & si\ x > 1 \end{cases}$$ (2 puntos)

3. Calcula los siguientes límites

$a)$ $\lim_{x\to+\infty} [\log(x^3) - 10x^2]$

$b)$ $\lim_{x\to 0} (1+4x^3)^{\frac{2}{x^3}}$

$c)$ $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x}\right)$

$d)$ $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}$ (2 puntos)

4. Prueba que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1 \cancel{=0}$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0,1]$ (1,5 puntos)

5. Sea la función : $f(x) = \begin{cases} \frac{x+b}{ax^2+3x+2} & si\ x < 0 \\ \cos x + b & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \\ x^2 - \frac{3}{2}a - \pi^2 & si\ x \geq \pi \end{cases}$ Calcula a y b para que sea continua en todo R (2 puntos)

6. Calcula el valor de a para que se cumpla: $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1} - x\right) = 2$ (1 punto)

TEMA 7. 2º BACH A 2021-22

① $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(1,5)

$1+x^2=0 \rightarrow \nexists$ Dom f: $\mathbb{R}$

f cont en $[-1,1]$ $\xrightarrow[\text{T. Weierstrass}]{}$ f(x) alcanza un máximo y mínimo absoluto en $[-1,1]$

② (2)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{|x+2|} & \text{si } x\le 1\\[2mm] \dfrac{x^2-3}{x+1} & \text{si } x>1\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{x+1}{-x-2} & \text{si } x<-2 & (A)\\[2mm] \dfrac{x+1}{x+2} & \text{si } -2\le x\le 1 & (B)\\[2mm] \dfrac{x^2-3}{x+1} & \text{si } x>1 & (C)\end{cases}$$

$$|x+2|=\begin{cases}x+2 & \text{si } x+2\geq 0 \rightarrow x\geq -2\\ -x-2 & \text{si } x+2<0 \rightarrow x<-2\end{cases}$$

(A) $f(x)=\dfrac{x+1}{-x-2}$ si $x<-2$ Continua en su intervalo de definición, porque $x=-2 \notin (-\infty,-2)$

AV No tiene porque $x=-2 \notin$ intervalo de definición

AH $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{x+1}{-x-2}=-1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$

AO No tiene, porque hay AH

(B) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ Discontinuidad evitable porque $-2\in[-2,1)$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$

AV $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{-1}{0}=-\infty \rightarrow \boxed{x=-2}$

AH $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x+2}=1 \rightarrow \boxed{y=1}$

AO No tiene ~~porque~~ hay AH

(C) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x+1}$ Continua porque $-1\notin$ Intervalo de definición $(-1,+\infty)$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

AV No tiene

AH $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3}{x+1}=+\infty$ No tiene

AO $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3}{x^2+x}=1$

$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-3}{x+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}-3-\cancel{x^2}-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3-x}{x+1}=-1$

$\boxed{y=x-1}$

CamScanner

③ a) $\lim_{x\to+\infty} \left[\log(x^3) - 10x^2\right] = [\infty - \infty] = -\infty$ porque la función potencial tiende más rápido a ∞ que la logarítmica

(2)

b) $\lim_{x\to 0} (1+4x^3)^{\frac{2}{x^3}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to 0} (1+4x^3-1)\cdot\frac{2}{x^3}} = e^{\lim_{x\to 0} 4x^3\cdot\frac{2}{x^3}}$

$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{8x^3}{x^3}} = e^{\lim_{x\to 0} 8} = e^8$

c) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x}) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}][\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}]}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}-1\right)\cdot 2\sqrt{x}} =$

$= e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x-\sqrt{x}}} = e^4$

④ $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$

(1,5)

f cont en $[0,1]$ por ser polinómica $\xrightarrow{\text{T. Bolzano}}$ $\exists c \in (0,1) \,/\, f(c) = 0$

$f(0) = 1$
$f(1) = -4$ $\Big\} f(0)\cdot f(1) < 0$

⑤ (2)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+b}{ax^2+3x+2} & \text{si } x < 0 \\ \cos x + b & \text{si } 0 \le x < \pi \\ x^2 - \frac{3}{2}a - \pi^2 & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$$

Cont. depende de a y b

Cont. por ser combinación de trigonométrica y polinómica en $[0,\pi)$

Cont. por ser polinómica en $[\pi,+\infty)$

En $x=0$

$f(0) = 1+b$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+b}{ax^2+3x+2} = \frac{b}{2}$

$\lim_{x\to 0^+} \cos x + b = 1+b$

$\frac{b}{2} = 1+b$

En $x=\pi$

$f(\pi) = \pi^2 - \frac{3}{2}a - \pi^2 = -\frac{3}{2}a$

$\lim_{x\to\pi^-} \cos\pi + b = -1+b$

$\lim_{x\to\pi^+} x^2 - \frac{3}{2}a - \pi^2 = -\frac{3}{2}a$

$-1+b = -\frac{3}{2}a$

$\frac{b}{2} = 1+b$
$-1+b = -\frac{3}{2}a$

$b = 2+2b \to b = -2$

$-1-2 = -\frac{3}{2}a \to -3 = -\frac{3}{2}a \to a = 2$

$\boxed{a=2,\ b=-2}$

Si $a=2$, $b=-2$ continua en todo $\mathbb{R}$

⑥ $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+ax+1} - x) = 2$

(1)

$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+ax+1} - x) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{[\sqrt{x^2+ax+1}-x][\sqrt{x^2+ax+1}+x]}{[\sqrt{x^2+ax+1}+x]} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+ax+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} = \frac{a}{\sqrt{1}+1} = \frac{a}{2} = 2 \to \boxed{a=4}$