T.2 2º BACHILLERATO A

1. Escribe las propiedades de los determinantes

2. Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   a. Averigua para qué valores de m la matriz es regular.
   b. Estudia el rango de A en función de los valores de m.

4.. Calcula X, de la siguiente ecuación $XA^2 + B = 2X$

Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 4, cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{4}$ y $|B| = -3$. Si A=(C_1, C_2, C_3, C_4). Calcular:

a) $|A^4 B^t|$ b) $|A^{-1} \cdot 3B|$

c) $|D| = |6C_1 + 3C_4 - 5C_3, \ -5C_3 - 3C_2, \ C_1 - 2C_3, \ 8C_4 + 3C_3|$

TEMA 2 . 2°A

(2)
$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1=C_1+C_5 \\ C_3=C_3+2C_5 \\ C_4=C_4+3C_5}]{} \begin{vmatrix} -6 & -1 & -8 & -14 & -4 \\ 5 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & -10 & -17 & -5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -6 & -1 & -8 & -14 \\ 5 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & -1 & -10 & -17 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1=C_1-5C_3 \\ C_2=C_2-2C_3 \\ C_4=C_4-4C_3}]{} \begin{vmatrix} 34 & 15 & -8 & 18 \\ -25 & -9 & 6 & -19 \\ 47 & 19 & -10 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow$$

$$= - \begin{vmatrix} 34 & 15 & 18 \\ -25 & -9 & -19 \\ 47 & 19 & 23 \end{vmatrix} = - \left[-28983 - (-28513) \right] = -(-470) = 470$$

(3) a)
$$\begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} = \left[2(m-1)(m-2)+m\right] - \left[-m(m-2)\right] = 2m^2-6m+4+m+m^2-2m =$$

$$= 3m^2-7m+4=0 \begin{cases} \to m_1 = 1 \\ \to m_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Si $m \neq 1, \frac{4}{3} \to |A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ Luego A es regular

b) Si $m \neq 1, \frac{4}{3}$, $m \in \mathbb{R} - \{1, 4/3\}$ $\} \to |A| \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 3$

Si $m=1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 2$

Si $m = \frac{4}{3}$ $\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -1 \\ 0 & -2/3 & 1 \\ 4/3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & -2/3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 2$

(4) $XA^2+B=2X \Rightarrow XA^2-2X=-B \Rightarrow X(A^2-2I) = -B \Rightarrow X = -B\,(A^2-2I)^{-1}$ 0,5

$C = A^2 - 2I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$ 0,5

$|C| = 126 - (-27) = 153$

$C_{11} = 42 \qquad C_{21} = -21 \qquad C_{31} = -18$

$C_{12} = -21 \qquad C_{22} = -15 \qquad C_{32} = +9$

$C_{13} = 12 \qquad C_{23} = -6 \qquad C_{33} = -27$

$$C^{-1} = \frac{1}{153}\begin{pmatrix} 42 & -21 & -18 \\ -21 & -15 & +9 \\ 12 & -6 & -27 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$X = -\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 42/153 & -21/153 & -18/153 \\ -21/153 & -15/153 & +9/153 \\ 12/153 & -6/153 & -27/153 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{219}{153} & -33/153 & -72/153 \\ -3/153 & 27/153 & 45/153 \\ 0 & 51/153 & 0 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

(5) $|A| = \frac{1}{4}, \quad |B| = -3$

a) $|A^4 B^t| = |A^4| \cdot |B^t| = |A|^4 \cdot |B| = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot (-3) = \frac{-3}{256}$

b) $|A^{-1} \cdot 3B| = |A^{-1}| \cdot |3B| = \frac{1}{|A|} \cdot 3^4 \cdot |B| = \frac{1}{1/4} \cdot 3^4 \cdot (-3) = -972$

c) $|6C_1 + 3C_4 - 5C_3,\ -5C_3 - 3C_2,\ C_1 - 2C_3,\ 8C_4 + 3C_3| =$

$= |6C_1, -5C_3 - 3C_2, C_1 - 2C_3, 8C_4 + 3C_3| + |3C_4, -5C_3 - 3C_2, C_1 - 2C_3, 8C_4 + 3C_3| +$

$+ |-5C_3, -5C_3 - 3C_2, C_1 - 2C_3, 8C_4 + 3C_3| =$

$= |6C_1, -5C_3, C_1 - 2C_3, 8C_4 + 3C_3| + |6C_1, -3C_2, C_1 - 2C_3, 8C_4 + 3C_3| +$

$+ |3C_4, -5C_3, C_1 - 2C_3, 8C_4 + 3C_3| + |3C_4, -3C_2, C_1 - 2C_3, 8C_4 + 3C_3| +$

$+ |\cancel{-5C_3, -5C_3, C_1 - 2C_3, 8C_4 + 3C_3}| + |-5C_3, -3C_2, C_1 - 2C_3, 8C_4 + 3C_3| =$

$= |6C_1, \cancel{-5C_3, C_1}, 8C_4 + 3C_3| + |6C_1, \cancel{-5C_3, -2C_3}, 8C_4 + 3C_3| +$

$+ |\cancel{6C_1, -3C_2, C_1}, 8C_4 + 3C_3| + |6C_1, -3C_2, -2C_3, 8C_4 + 3C_3| +$

$+ |3C_4, -5C_3, C_1, 8C_4 + 3C_3| + |\cancel{3C_4, -5C_3, -2C_3, 8C_4 + 3C_3}| +$

$+ |3C_4, -3C_2, C_1, 8C_4 + 3C_3| + |\cancel{3C_4, -3C_2, -2C_3, 8C_4 + 3C_3}| +$

$+ |-5C_3, -3C_2, C_1, 8C_4 + 3C_3| + |\cancel{-5C_3, -3C_2, -2C_3}, 8C_4 + 3C_3| =$

$= |6C_1, -3C_2, -2C_3, 8C_4| + |6C_1, \cancel{-3C_2, -2C_3, 3C_3}| +$

$+ |3C_4, \cancel{-5C_3, C_1, 8C_4}| + |3C_4, \cancel{-5C_3, C_1, 3C_3}| + |3C_4, \cancel{-3C_2, C_1}, 8C_4| +$

$+ |3C_4, -3C_2, C_1, 3C_3| + |3C_4, \cancel{-3C_2, -2C_3, 8C_4}| + |3C_4, \cancel{-3C_2, -2C_3}, 3C_3| +$

$+ |-5C_3, -3C_2, C_1, 8C_4| + |\cancel{-5C_3, -3C_2, C_1, 3C_3}| =$

$= 288\,|C_1, C_2, C_3, C_4| + 120\,|C_3, C_2, C_1, C_4| - 27\,|C_4, C_2, C_1, C_3| =$

$= 288\,|A| - 120\,|A| - 27\,|A| = 141\,|A| = 141 \cdot \frac{1}{4} = \frac{141}{4}$