52 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$:

a. Calcula las matrices $C = A \cdot B$ y $D = A^t \cdot B^t$.

b. Determina para qué valores de a son invertibles las matrices C y D y calcula C^{-1} y D^{-1} cuando sea posible.

53 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde x es cualquier número real; encuentra los valores de x para los que $A \cdot B$ sea invertible.

54 Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$:

a. Calcula si es posible A^{-1}.

b. Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

55 A partir de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$:

a. Calcula $A^2 - 4A + 3I_3$.

b. Demuestra que $A^{-1} = \frac{1}{3}(4I_3 - A)$.

c. Calcula $(A - 2I)^{-1}$.

56 Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica $A^2 = I$:

a. Expresa A^{-1} en función de A.

b. Expresa A^n en función de A e I, para cualquier número natural, n.

57 La matriz A es una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$:

a. Demuestra que existe la inversa de A y exprésala en función de A e I.

b. Calcula dos números, p y q, tales que $A^3 = pI + qA$.

c. Calcula el valor de k para que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumpla: $A^2 + 2A = I$

58 Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $M^2 - 2M = 3I$:

a. Averigua si existe la matriz inversa de M y, en caso afirmativo, exprésala en términos de M e I.

b. Expresa M^3 como combinación lineal de M e I.

c. Halla todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifiquen la identidad del enunciado.

59 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a. Halla dos constantes, a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

b. Obtén la matriz A^5 utilizando solo la expresión del apartado anterior.

60 Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a. Halla dos constantes, a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

b. Calcula A^5 utilizando únicamente el resultado obtenido en el apartado anterior.

c. Halla todas las matrices, X, que cumplan $(A - X) \cdot (A + X) = A^2 - X^2$.

61 Resuelve la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

62 Dadas $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, obtén la matriz, X, de orden 2 que cumpla $A \cdot X \cdot B = A + B$.

63 Halla una matriz, X, tal que $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

64 Dada la ecuación $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde X es una matriz cuadrada de orden 2:

a. Calcula los valores de a para que la ecuación tenga solución.

b. Calcula X para $a = 1$.

65 Encuentra todas las matrices, X, tales que $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

66 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$:

a. Determina si A y B son invertibles y, si lo son, calcula la matriz inversa.

b. Resuelve la ecuación $X \cdot A - B = 2I$.

67 Halla los valores de k para los que existe la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}$ y calcúlala para $k = 6$.