TEMA 1

① Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}$. Estudia el rango en función del valor de k.

Calcula para qué valores de k existe la matriz inversa. Si es posible calcula la matriz inversa para $k=6$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_1-F_3]{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-k \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4-k \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

El $rg\, A = 3 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

- Existe la matriz inversa para cualquier valor de k, porque $rg\, A = 3 = \text{orden } A \quad \forall k \in \mathbb{R}$.

- Para $k=6$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[4F_1-F_3]{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1+3F_3 \\ F_2-2F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3/-1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

② Calcula A^n, A^3, A^{21}, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$A^5 = A^4 \cdot A = -A \cdot A = -A^2$

$A^6 = A^3 \cdot A^3 = I$

$$A^n = \begin{cases} n=6k & \rightarrow I \\ n=6k+1 & \rightarrow A \\ n=6k+2 & \rightarrow A^2 \\ n=6k+3 & \rightarrow -I \\ n=6k+4 & \rightarrow -A \\ n=6k+5 & \rightarrow -A^2 \end{cases}$$

$A^{21} = A^3 = -I$