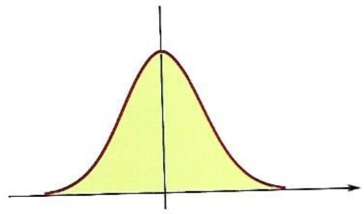
5 Distribución normal

Una variable aleatoria, X, sigue una **distribución** de probabilidad **normal**, y lo escribimos como $X \equiv N(\mu, \sigma)$, cuando:

- Es una variable aleatoria continua.
- Depende de dos parámetros, μ y σ.
  - μ = media de la variable aleatoria
  - σ = desviación típica de la variable aleatoria
- Su función de densidad es simétrica respecto de la media.

Distribución normal



La más importante de todas las distribuciones normales es la que tiene media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$, y se denota $Z \equiv N(0, 1)$.

Como la media es cero, entonces la función es simétrica respecto del eje Y.

5.1. Tipificación

Para **tipificar un valor** de una variable aleatoria X, primero se le resta la media de la variable, y el resultado se divide entre la desviación típica.

$$X \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Con el proceso de tipificación logramos transformar una variable en otra variable que tiene media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$.

Recuerda

Tipificando podemos comparar elementos que pertenecen a distintas poblaciones.

EJEMPLO

3 **Según diferentes análisis, amueblar una casa cuesta de media en una ciudad 7500 €, con una desviación típica de 150 €. En otra ciudad, en cambio, el coste medio es de 8000 €, con una desviación típica de 250 €. Si a una familia le dan en la primera ciudad un presupuesto de 7600 €, y a otra en la segunda, de 8100 €, ¿cuál de las dos familias recibe mejor oferta?**

Primera ciudad → $N(7500, 150)$ Segunda ciudad → $N(8000, 250)$

Al comparar los presupuestos, la primera familia recibe mejor oferta → $7600 < 8100$.

Si comparamos cada presupuesto con el coste medio en su ciudad, los dos serían iguales, ya que ambos están 100 € por encima de la media.

Sin embargo, si se tipifica cada uno de los presupuestos y se compara:

$$7600 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{7600 - 7500}{150} = 0{,}667 \qquad 8100 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{8100 - 8000}{250} = 0{,}4$$

Esto indica que la segunda familia recibe mejor oferta dentro de su ciudad.

ACTIVIDADES

15. Los ebanistas tienen un salario medio de 1280 €, con una desviación típica de 200 €; y los fontaneros 1060 €, con una desviación típica de 180 €. Si a un ebanista le ofrecen un sueldo de 1320 € y a un fontanero otro de 1100 €, ¿cuál de los dos recibe la mejor oferta?

16. Compara los datos de estas distribuciones.

$x_1 = 2$ (con $\mu = 1$, $\sigma = 2$)

$x_2 = 1$ (con $\mu = 2$, $\sigma = 1$)

$x_3 = 1{,}5$ (con $\mu = 1{,}5$, $\sigma = 1{,}5$)

5.2. Cálculo de probabilidades mediante tablas de $N(0, 1)$

Para calcular probabilidades en una variable aleatoria que se distribuye según u normal $N(\mu, \sigma)$, tipificamos la variable y luego utilizamos la tabla de probabilidad de Z, la distribución normal $N(0, 1)$.

➔ SABER HACER

Calcular probabilidades por medio de tablas en variables aleatorias que siguen una distribución normal

▶ El tiempo de recuperación, en días, de una gripe sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 3. Calcula:

a) La probabilidad de que una persona tarde menos de 6 días en recuperarse.

b) La probabilidad de que, al escoger una persona al azar, esta se recupere en más de 10 días.

PRIMERO. Se define la variable aleatoria y se escriben las probabilidades pedidas en función de esa variable.

La variable aleatoria X es el tiempo de recuperación de la gripe de una persona elegida al azar: $X \equiv N(7, 3)$.

Las probabilidades pedidas son: a) $P(X < 6)$ b) $P(X \geq 10)$

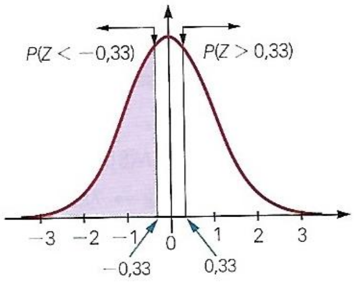
SEGUNDO. Se tipifica la variable para utilizar la tabla de probabilidades de la distribución normal $Z \equiv N(0, 1)$.

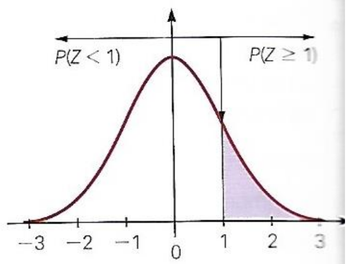
a) $P(X < 6) = P\left(\dfrac{X-7}{3} < \dfrac{6-7}{3}\right) = P(Z < -0{,}33)$

b) $P(X \geq 10) = P\left(\dfrac{X-7}{3} \geq \dfrac{10-7}{3}\right) = P(Z \geq 1)$

TERCERO. La tabla de probabilidades de la distribución normal $Z \equiv N(0, 1)$ mide la probabilidad de que sea menor o igual que un cierto número, $P(Z \leq a)$, y en ella solo aparecen números positivos. Por eso se transforman la probabilidad y los valores hasta que estos se puedan encontrar en la tabla.

a) $P(Z < -0{,}33) = P(Z > 0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33)$ b) $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729

CUARTO. Se busca en la tabla: hasta el primer decimal está en la primera fila y el segundo decimal está en la primera columna. La probabilidad es igual al número que está en la intersección.

a) $P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$

b) $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

ACTIVIDADES

17. Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal $X \equiv N(5, 2)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X < 2)$ c) $P(X \leq 4)$ e) $P(X < 7)$

b) $P(X > 3)$ d) $P(X \geq 6)$ f) $P(X \leq 8)$

18. El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal $N(192, 12)$. Calcula la probabi de que una persona adulta sana tenga un nivel de coles

a) Superior a 200 unidades. b) Entre 180 y 220 uni

78. Halla el valor de k para que se cumplan las igualdades en la distribución $N(0, 1)$.

a) $P(k < Z < 2k) = 0{,}0761$

b) $P(-k < Z < 3k) = 0{,}1574$

c) $P(-2k < Z < k) = 0{,}9318$

d) $P(-5k < Z < -2k) = 0{,}1891$

79. En la distribución $N(25, 4)$, calcula estas probabilidades.

a) $P(X < 22)$

b) $P(X \geq 27{,}3)$

c) $P(X \leq 28{,}4)$

d) $P(X \geq 18{,}04)$

e) $P(24 < X \leq 30)$

f) $P(20 \leq X < 23)$

80. En la distribución $N(80, 11)$, calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

a) $P(X < 86)$

b) $P(X \geq 88)$

c) $P(X \leq 75)$

d) $P(X \geq 68)$

e) $P(67 < X \leq 77)$

f) $P(76 \leq X < 85)$

81. Calcula, en cada caso, μ y σ de una distribución $N(\mu, \sigma)$ sabiendo que:

a) $P(X \leq 22) = 0{,}6915$
$P(X < 8) = 0{,}9938$

b) $P(X > 25) = 0{,}1056$
$P(X > 4{,}8) = 0{,}9332$

82. La talla de un grupo de personas sigue una distribución normal con una media de 165 cm y una desviación típica de 12 cm. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:

a) Mida más de 170 cm.

b) Mida menos de 168 cm.

c) Mida entre 159 y 172 cm.

83. El peso de las lubinas de piscifactoría, medido en gramos, se distribuye según una normal $N(900, 200)$. Cada día se extraen 100 ejemplares para su consumo.

a) Determina el número de lubinas que pesa más de 980 g.

b) Calcula el porcentaje de las que pesan entre 750 y 1 100 g.

c) Completa en tu cuaderno:
«Las 20 lubinas más pequeñas pesan menos de…».

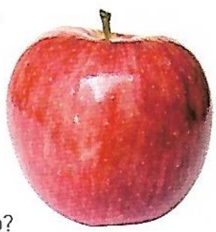
d) Completa en tu cuaderno:
«La cuarta parte formada por las más grandes pesan más de…».

84. El peso de las manzanas se distribuye normalmente con una media de 175 g y una desviación típica de 25 g. Un almacenista ha comprado 15 000 kg de manzanas.

a) ¿Qué cantidad de manzanas espera que pesen menos de 168 g?

b) ¿Qué porcentaje pesará entre 170 y 180 g?

c) Si quiere hacer dos grupos, uno con las que pesan menos de 160 g y otro con el resto, ¿cuántos kilos habrá en cada grupo?



d) Si, por el contrario, uno de los grupos está formado por la cuarta parte de manzanas más pesadas, ¿a partir de qué peso hará la separación?

85. Los pesos de los deportistas de un club de natación siguen una distribución con media 75 kg y desviación típica 4 kg. Calcula la probabilidad de que un deportista elegido al azar:

a) Pese menos de 72 kg pero más de 70 kg.

b) Pese entre 78 y 80 kg.

c) Pese, al menos, 81 kg.

86. El tiempo de vida de las bombillas de una empresa, medido en horas, se distribuye según una normal $N(5\,000, 120)$. Calcula qué porcentaje de las bombillas:

a) Durará más de 5 200 horas.

b) Durará entre 5 040 y 5 070 horas.

c) Durará entre 5 145 y 5 230 horas.

87. Se sabe que el 93,7 % de las camisas de una marca se fabrican en un tiempo menor de 7 horas. Si el tiempo de fabricación se distribuye con una media de 6,5 horas, calcula la desviación típica.

88. En una ciudad la temperatura máxima en el mes de julio sigue una distribución normal de media 32 °C y una desviación típica de 4 °C. Calcula cuántos días se superan los 37 °C y cuántos no se superan los 35 °C.

89. Una máquina que fabrica discos compactos consigue fabricar un 90 % de unidades sin error. Si escogemos al azar 100 discos, calcula estas probabilidades.

a) Que haya dos defectuosos.

b) Que haya más de uno defectuoso.

90. Un examen tipo test consta de 50 preguntas con tres posibles respuestas, y solo una de ellas correcta. Si se realiza el examen respondiendo al azar, calcula.

a) La probabilidad de que se responda correctamente a más de 4 preguntas.

b) La probabilidad de que se responda correctamente a menos de 10 preguntas.

c) La probabilidad de que se apruebe el examen (para ello se debe responder correctamente a 25 o más preguntas).

91. En un laboratorio de análisis clínicos saben que el 70 % de las pruebas de anemia que realizan resultan negativas. Si han recibido 60 muestras para analizar, responde.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de 5 personas a las que les dé positivo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a una persona o más?

92. Se está experimentando una nueva vacuna para la malaria que resulta efectiva en el 60 % de los casos. Si se eligen al azar 200 personas, halla las siguientes probabilidades.

a) Que en ese grupo la vacuna sea efectiva para 30 personas.

b) Que la vacuna sea efectiva para más de 80 pero menos de 120 personas.

c) Que la vacuna sea efectiva en 90 o menos personas.

93. Las compañías de seguros han calculado que 1 de cada 5 vehículos tiene un accidente al año. Si se toman al azar 40 vehículos, determina.

a) La probabilidad de que ese año 10 de ellos tengan un accidente.

b) La probabilidad de que sean entre 10 y 12 vehículos, ambos números incluidos.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ese año se accidenten más de 15 vehículos?

Problemas con distribuciones de probabilidad

94. Un fabricante de correas para relojes ha estudiado que el contorno de la muñeca de los varones sigue una distribución normal cuya media es 20,5 cm y la desviación típica es 1,5 cm.

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm?

b) Si se fabrican correas que midan entre 17 y 22 cm, ¿qué porcentaje de la población podrá usarlas?

c) Se pretende reducir costes fabricando menos variedad de longitudes de correas. Encuentra un intervalo $(20{,}5 - a;\ 20{,}5 + a)$ en el que se incluya el 95 % de los varones.

95. Solo el 10 % de los boletos de una tómbola tienen premio. ¿Qué es más fácil, tener dos premios comprando 10 boletos o conseguir un premio comprando 3 boletos?

96. Escoge, entre los juegos a) y b), aquel en el que tengas mayor probabilidad de ganar.

a) Se lanzan 2 dados y, si la suma es mayor que 9, ganas.

b) Se lanzan 10 monedas y ganas si salen más de 6 caras.

97. Se sabe que el 98,61 % de los tornillos fabricados por una empresa tiene un diámetro menor que 3,398 mm. Si el diámetro de los tornillos se distribuye según una normal de media 3,2 mm, determina la desviación típica.

98. La distribución de edades de los miembros de una asociación sigue una ley normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94,52 % tiene menos de 32 años, y un 21,19 % tiene menos de 20 años, calcula su media y su desviación típica.

99. Dos amigos están jugando al parchís. Uno de ellos asegura que ha tirado el dado 30 veces y no le ha salido ningún 5. El otro amigo afirma que eso es imposible. ¿Es realmente imposible? ¿Cuál es la probabilidad de que eso suceda?

100. En un instituto se han comprado 150 ordenadores para 4 aulas de informática. La duración de la batería permite tener una media de trabajo de 180 minutos, con una desviación típica de 25 minutos.

a) Calcula la probabilidad de que la batería de uno de los ordenadores solo dure 2 horas.

b) ¿Cuántos ordenadores tendrán una batería cuya carga dure más de 200 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 110 de esos ordenadores sigan trabajando a los 180 minutos?

101. El peso de los recién nacidos se distribuye según una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Si los últimos datos publicados aseguran que los percentiles 75 y 90 de esta distribución son 3,2 y 3,5 kg, respectivamente:

a) Calcula la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,5 kg.

b) Halla la probabilidad de que un recién nacido pese más de 4 kg.

c) ¿Cuál es el percentil 10?

d) Determina la mediana de la distribución.

102. El sueldo de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal de media 1 500 €. Si el sueldo de un técnico de categoría 3 es de 960 €, y el 75 % de los trabajadores de la empresa cobra más que él:

a) Calcula la probabilidad de que el sueldo de un empleado escogido al azar sea superior a 1 600 €.

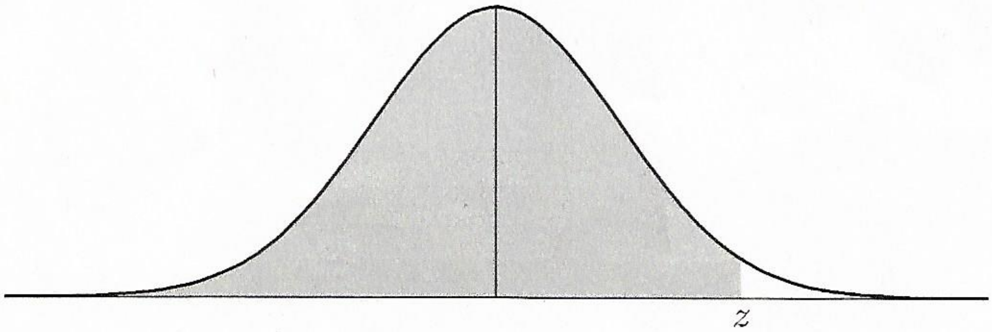
b) El sueldo más elevado es el de los directivos. Si estos representan el 5 % de los empleados de la empresa, ¿cuál es su sueldo mínimo?

103. En una granja de gallinas se clasifican los huevos por su peso, en gramos, según las categorías incluidas en la tabla.

Categoría	S	M	L	XL
Peso	< 53	$[53, 63)$	$[63, 73)$	≥ 73

El peso de los huevos de las gallinas de esa granja sigue una distribución $N(62, 8)$. Calcula los porcentajes de huevos que se obtienen de cada categoría.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990