

CONTROL LÍMITES 1º BACHILLERATO A

1. Estudia la continuidad de la siguiente función: (1 punto)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x + 1} & \text{si } x < -1 \\ 3x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ |2x - 6| & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2. Averiguar a, b para que la función f(x) sea continua: (1,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x + b}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ 4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{x - 2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones: (1,5 puntos)

a) $\frac{4x^3 - 7x^2 + 4x}{x^2 - 9}$ b. $f(x) = \frac{6x - 2}{4x^2 - 1}$

4. Calcula los siguientes límites (2 puntos)

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{4x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{x-1}$ c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 - 3x}{5x^2 + 4x - 7} \right)^{x^2 + 7}$ d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 7}{x + 3} - \frac{3x^2 + 5x}{2x - 8} \right)$

5. Calcula el dominio de las siguientes funciones: (1,5 puntos)

a. $F(x) = e^{\frac{5}{2x-3}}$ b. $g(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 1}}$ c. $h(x) = \ln \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ d. $i(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 6x - 7}$

6. Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{5x + 3}$; $g(x) = \frac{3x-1}{5x+2}$; $h(x) = 5-4x^2$

Calcula a) f^{-1} b) g^{-1} c) h^{-1} Comprueba que son las funciones inversas
d) $f^{-1} \circ g^{-1}$ e) $h^{-1} \circ g \circ f$ (2,5 puntos)

TEMA 8. LÍMITES 1A

① $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ 3x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ |2x-6| & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Continua en su intervalo de definición, $-1 \notin \text{Dom } f$
 Continua por ser polinómica
 Continua por ser valor absoluto de un polinomio

En $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{2}{0} = \infty$$

\neq Disc. inevitable de
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} 3x+1 = -2$ Salto infinito en $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ 3x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -2x+6 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x-6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

En $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x+1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -2x+6 = 2$$

Disc. inevitable de salto finito en $x = 2$

En $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} -2x+6 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x-6 = 0$$

Continua en $x = 3$

② $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+b}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{4}{x-2} & 0 < x < 1 \\ \frac{x^2+1}{ax} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Todas son continuas en sus intervalos de definición

En $x = 0$

$$f(0) = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x+b}{x-1} = -b \quad \parallel \quad \Rightarrow -b = -2 \quad \boxed{b=2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x-2} = -2$$

En $x = 1$

$$f(1) = \frac{2}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{x-2} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{ax} = \frac{2}{a}$$

$$\left. \begin{matrix} -4 \\ \parallel \\ \frac{2}{a} = -4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

③ Asíntotas

a) $f(x) = \frac{4x^3 - 7x^2 + 4x}{x^2 - 9}$ Dom $\mathbb{R} - \{ \pm 3 \}$

AV $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3 - 7x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \frac{57}{0} = \infty \Rightarrow$ AV en $x = 3$

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^3 - 7x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \frac{-183}{0} = \infty \Rightarrow$ AV en $x = -3$

AH $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{4x^3 - 7x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \infty$ No tiene AH

AO $m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{4x^3 - 7x^2 + 4x}{x^3 - 9x} = 4$

$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{4x^3 - 7x^2 + 4x}{x^2 - 9} - 4x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-7x^2 + 40x}{x^2 - 9} = -7$

AO en $y = 4x - 7$

b) $f(x) = \frac{6x-2}{4x^2-1}$ Dom $\mathbb{R} - \{\pm 1/2\}$

AV $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x-2}{4x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow$ AV en $x = 1/2$

$\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x-2}{4x^2-1} = \frac{-5}{0} = \infty \rightarrow$ AV en $x = -1/2$

AH $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{6x-2}{4x^2-1} = 0 \rightarrow$ AH en $y = 0$

AO No tiene porque hay AH

④ a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-5x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x-5)}{4x} = \frac{-5}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-1}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{2-x}+1} = -1/2$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2-3x}{5x^2+4x-7} \right)^{x^2+7} = [1^\infty] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2-3x}{5x^2+4x-7} - 1 \right) (x^2+7)} =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-7x+7)(x^2+7)}{5x^2+4x-7}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3+7x^2-49x+49}{5x^2+4x-7}} = e^{-\infty} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-7}{x+3} - \frac{3x^2+5x}{2x-8} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3-22x^2-29x+56}{2x^2-2x-24} = -\infty$

⑤ a) $f(x) = e^{\frac{5}{2x-3}}$ \rightarrow Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{3/2\}$
 $2x-3=0 \rightarrow x=3/2$

b) $g(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-1}}$; $x^2-1 > 0 \rightarrow$ Dom $g(x) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

c) $h(x) = \ln \sqrt{x^2-6x+8}$; $x^2-6x+8 > 0 \rightarrow$ Dom $h(x) = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

d) $i(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+6x-7}$; $x^2+6x-7 = 0 \rightarrow$ Dom $i(x) = \mathbb{R} - \{1, -7\}$

⑥ a) $y = \sqrt{5x+3} \rightarrow x = \sqrt{5y+3} \rightarrow x^2 = 5y+3 \Rightarrow y = \frac{x^2-3}{5} = f^{-1}(x)$
 $f \circ f^{-1}(x) = f\left(\frac{x^2-3}{5}\right) = \sqrt{5\left(\frac{x^2-3}{5}\right)+3} = \sqrt{x^2-3+3} = \sqrt{x^2} = x$

b) $y = \frac{3x-1}{5x+2} \rightarrow x = \frac{3y-1}{5y+2} \rightarrow (5y+2)x = 3y-1 \rightarrow 5yx-3y = -1-2x$
 $y(5x-3) = -1-2x \rightarrow y = \frac{-1-2x}{5x-3} = g^{-1}(x)$
 $g \circ g^{-1}(x) = g\left(\frac{-1-2x}{5x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{-1-2x}{5x-3}\right)-1}{5\left(\frac{-1-2x}{5x-3}\right)+2} = \frac{\frac{-3-6x-5x+3}{5x-3}-1}{\frac{-5-10x+10x-6}{5x-3}+2} = \frac{-11x}{-11} = x$

$$c) y = 5 - 4x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{5-y}{4}} = h^{-1}(y)$$

$$h \circ h^{-1}(x) = h\left(\sqrt{\frac{5-x}{4}}\right) = 5 - 4\left(\sqrt{\frac{5-x}{4}}\right)^2 = 5 - 4\left(\frac{5-x}{4}\right) = 5 - 5 + x = x$$

$$d) f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{-1-2x}{5x-3}\right) = \frac{\left(\frac{-1-2x}{5x-3}\right)^2 - 3}{5}$$

$$e) h^{-1} \circ g \circ f(x) = h^{-1} \circ g\left(\sqrt{5x+3}\right) = h^{-1}\left(\frac{3\sqrt{5x+3} - 1}{5\sqrt{5x+3} + 2}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{5 - \left(\frac{3\sqrt{5x+3} - 1}{5\sqrt{5x+3} + 2}\right)}{4}}$$