8. Máximos y mínimos relativos:

$x^2(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0$ raíz doble; $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$ raíces simples.

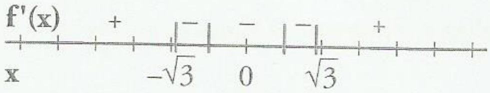
$$f''(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0\ (-) \Rightarrow A\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \text{ máximo relativo.}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0\ (+) \Rightarrow B\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \text{ mínimo relativo.}$$

Monotonía:

$$f'(x) = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow \text{Si } x=2 \Rightarrow f'(2) = \frac{2^4-3\cdot 2^2}{(2^2-1)^2} = \frac{4}{9} > 0\ (+)$$

Las raíces del denominador son discontinuidades dobles.



9. Puntos de inflexión:

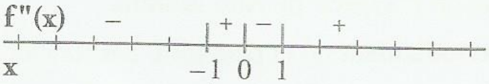
$2x(x^2+3)=0 \Rightarrow x=0$ raíz simple.

$$f'''(x) = -\frac{6x^4+36x^2+6}{(x^2-1)^4} \Rightarrow f'''(0) = -6 \neq 0 \Rightarrow O(0, 0), \text{ punto de inflexión.}$$

Curvatura:

$$f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} \Rightarrow \text{Si } x=2 \Rightarrow f''(2) = \frac{2\cdot 2^3+6\cdot 2}{(2^2-1)^3} = \frac{28}{27} > 0\ (+)$$

Las raíces del denominador son discontinuidades triples.



Derivadas sucesivas de una función racional

El denominador nunca se desarrolla, porque a partir de la 2ª derivada se simplifica:

- En la 2ª derivada se simplifica siempre un factor.
- En la 3ª derivada se simplifican dos factores.

El exponente del denominador va aumentando una unidad en cada derivada.

$$y = \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$y' = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6x^4+36x^2+6}{(x^2-1)^4}$$

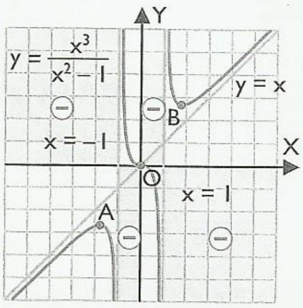
Formulario: cuadro resumen y gráfica

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x=-1$, $x=1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es una función impar $\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas: • Verticales: $x=-1$, $x=1$
   • Horizontales: no tiene.
   • Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes: • Eje X: $O(0, 0)$
   • Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo: • Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   • Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: $A\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
   • Mínimo relativo: $B\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

   Monotonía:
   • Creciente (↗): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
   • Decreciente (↘): $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura: • Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   • Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Recorrido o imagen: $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Aplica la teoría

9. $y = \frac{x^2+1}{x}$ **10.** $y = \frac{x^2-1}{x}$ **11.** $y = \frac{1}{x^2-1}$ **12.** $y = \frac{x-1}{x^2}$ **13.** $y = \frac{3x}{x^2+1}$ **14.** $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$